- Le produit mixte de trois vecteurs est donc exprimé par

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{5.27}$$

Notons, sans démonstration, que ε_{ijk} est lié à δ_{ij} par la relation

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{5.28}$$

Montrons maintenant que les ε_{ijk} forment les composantes d'un tenseur. Il vient en effet,

$$\varepsilon'_{lmn} = \sum_i \sum_j \sum_k L_{li} L_{mj} L_{nk} \varepsilon_{ijk} = \det(\mathsf{L})\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{lmn}$$

puisque la matrice L est orthogonale et son déterminant est égal à un. Dès lors, les ε_{ijk} forment les composantes d'un tenseur cartésien (anti-symétrique) du troisième ordre.

Les tenseurs formés par δ_{ij} et ε_{ijk} ont la particularité que leurs composantes sont invariantes lors d'un changement d'axes. Les tenseurs qui ont cette propriété sont dits *isotropes*. En fait, on montre que tous les tenseurs isotropes du second et du troisième ordres sont identiques à δ_{ij} et ε_{ijk} à un coefficient multiplicateur près. De même, la forme la plus générale d'un tenseur isotrope du quatrième ordre est donnée par

$$C_{ijkl} = \eta\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} \tag{5.29}$$

où η, λ et ν sont des scalaires.

EXEMPLE 5.10 Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les contraintes au sein d'un matériau sont supposées proportionnelles aux déformations (*loi de Hooke*). L'état de contrainte étant décrit par le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et les déformations par le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$, on a, de façon générale,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

où C_{ijkl} désigne les composantes d'un tenseur d'ordre 4. Si le matériaux est isotrope, ce tenseur doit être de la forme (5.29), de sorte que la relation entre les contraintes et les déformations se réduit à

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\eta\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \eta\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \nu\varepsilon_{ji}\end{aligned}$$

Si on tient compte de la symétrie des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$, on relève que seule la somme des deux paramètres η et ν est physiquement significative. On constate donc que les $3^4 = 81$ éléments du tenseur $\mathbf{C}$ ne sont pas indépendants et que la description des propriétés élastiques des matériaux isotropes ne nécessite que deux paramètres. En pratique, la loi de comportement d'un matériau linéaire isotrope s'écrit sous la forme

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$$

où les paramètres E et ν sont, respectivement, le *module de Young* et le *coefficient de Poisson* du matériau.
